اللقاء الرابع

البرمجة الخطية وتحديد المزيج الأمثل من المنتجات
(الطريقة البيانية)

مقدمة

في هذا اللقاء سوف نتعرض لأحد المجالات الحديثة في علم الرياضيات وهو ما يسمى بالبرمجة الخطية ، وترجع أهمية ذلك الموضوع إلى أواخر الأربيعنات عندما أستخدم هذا الأسلوب في الولايات المتحدة لحل بعض مشاكل الإمداد ، ومنذ ذلك الحين تم استخدام أسلوب البرمجة الخطية في العديد من المجالات ، فهي تستخدم لإيجاد الحلول المثلى للمشاكل التي تتضمن الوصول لهدف أكبرقيمة أو أقل قيمة ممكنة له مع الالتزام بعدد من القيود التي تفرضها طبيعة المشكلة والتي يمكن صياغتها في صورة عدد من غير المتساويات الخطية .

غير المتساويات الخطية

غير المتساوية هي بيان أن عددا حقيقيا يكون أكبر أو أصغر من عدد آخر . فمثلا :

$6 > 3$

$x_1 > x_2$

$m > n$

وقد تحتوى غير المتساوية على أكثر من متغير مثل

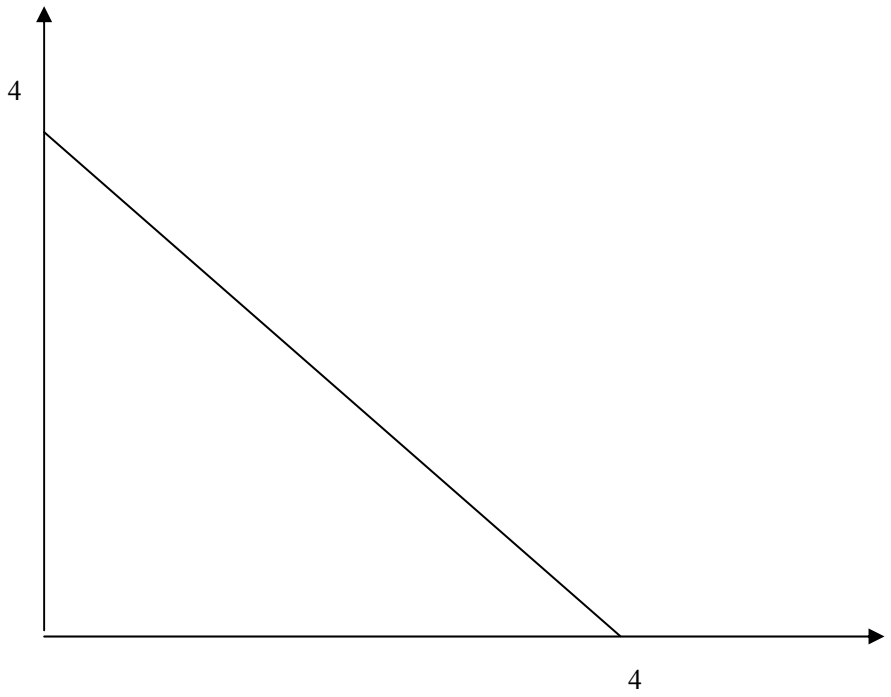
$2x_1 + 3x_2 > 4$

تمثيل غير المتساويات بيانيا

إذا رسمنا الخط البياني الذي يمثل الدالة $x + y = 4$ فإن هذا الخط يفصل بين فراغين هما :

الأول : الفراغ الواقع تحت الخط ويشمل جميع النقط التي تحقق عندها غير المتساوية $x + y > 4$

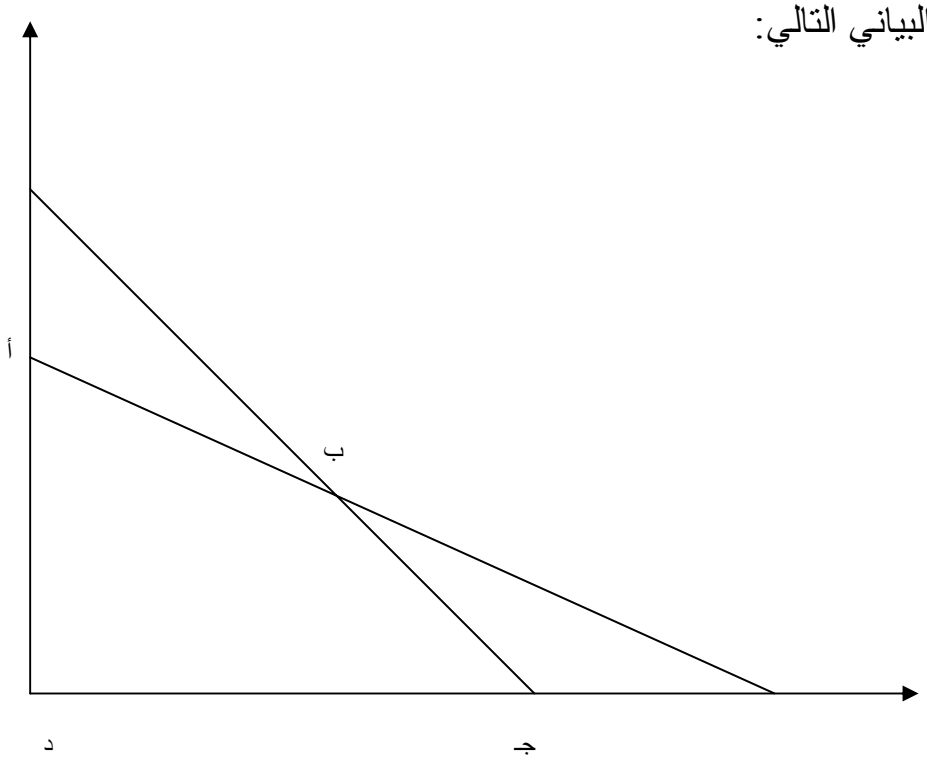
الثاني: الفراغ الواقع فوق الخط ويشمل جميع النقط التي تحقق عندها غير المتساوية $x + y < 4$



أما إذا أخذنا غير المتساويات

$$x + 3y \le 3$$
$$4x + y \le 4$$

فالرسم البياني يمثل فراغ يتحقق مع المتساويات في نفس الوقت كما هو واضح في الرسم البياني التالي:



ويتخذ الفراغ المظلل شكل مضلع محدب تكون نهايته العظمى عند بعض رؤوس المضلع ، وبذلك لإيجاد النهاية العظمى أو الصغرى نوجد قيمة الدالتين عند كل رأس للمضلع وأكبر قيمة نحصل عليها هي النهاية العظمى ، وأصغر قيمة نحصل عليها هي النهاية الصغرى .

الحل البياني لمشاكل البرمجة الخطية

تحدثنا مسبقا أن البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يهدف إلى تحديد الحجم الأمثل للمشروع ، أى ذلك الحجم الذي يحقق أقصى ربح أو أقل تكلفة بشرط الالتزام بقيود معينة يمكن تمثيلها بعدد من غير المتساويات الخطية . ويمكن صياغة أى مشكلة من هذا النوع بحيث تتضمن ثلاث أجزاء وهى :

الأول : الدالة المراد جعلها نهاية عظمى (كدالة الربح) أو نهاية صغرى (كدالة التكاليف) وهذه تسمى بدالة الهدف *Objective Function* .

الثاني : مجموعة القيود التي تفرضها طبيعة المشكلة والتي يمكن تمثيلها بعدد من غير المتساويات الخطية والتي تمثل عادة الطاقات القصوى للمشروع وتعرف بالقيود الهيكلية *Structural Constraints*.

الثالث : متطلبات عدم السلبية *Non-negativity Requirements* وهى القيود التي يفرضها الواقع العملي ، والتي تعنى أن عدد الوحدات المنتجة يجب ألا يكون بالسالب .

ويمكن توضيح خطوات ذلك الأسلوب من خلال الأمثلة التالية :

مثال

يقوم مصنع الشروق للصناعات الغذائية بإنتاج نوعين من السلع ويستخدم في إنتاجيهما الفاكهة والسكر كمواد أولية . وبفرض توافر لديك البيانات التالية :

- يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الأولى إلى 3 وحدات فاكهة ، 9 وحدات مواد سكرية . ويصل ربح الوحدة إلى 2 ريال .
- يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الثانية إلى 4 وحدات فاكهة ، 7 وحدات مواد سكرية . ويصل ربح الوحدة إلى 3 ريال .
- يمكن توفير 300 وحدة من الفاكهة يوميا ، 630 وحدة من السكريات يوميا.

والمطلوب : بإعتبارك مهندس إنتاج تحديد الكمية الواجب إنتاجها من السلعتين أو أحدهما لتحقيق أكبر ربح مكن ، وما هو مقدار الطاقة العاطلة إن وجدت ، وما هو مقدار الربح الكلى .

الحل

1- بناء النموذج الرياضي

	الموارد المتاحة		
المنتجات	فاكهة	مواد سكرية	الربح
الأولى x	3	9	2
الثانية y	4	7	3
	الموارد الكلية		
	300	630	

2- كتابة القيود

$$3x + 4y \le 300$$
$$9x + 7y \le 630$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

3- كتابة دالة الهدف

المطلوب تعظيم الدالة

$$p = 2x + 3y$$

4- تحويل القيود إلى معادلات

$$3x + 4y = 300$$
$$\underline{x = 0}$$
$$\therefore 4y = 300$$
$$y = 75$$
$$\underline{y = 0}$$
$$3x = 300$$
$$x = 100$$

X	0	100
y	75	0

$9x + 7y = 630$

$\underline{x = 0}$

$\therefore 7y = 630$

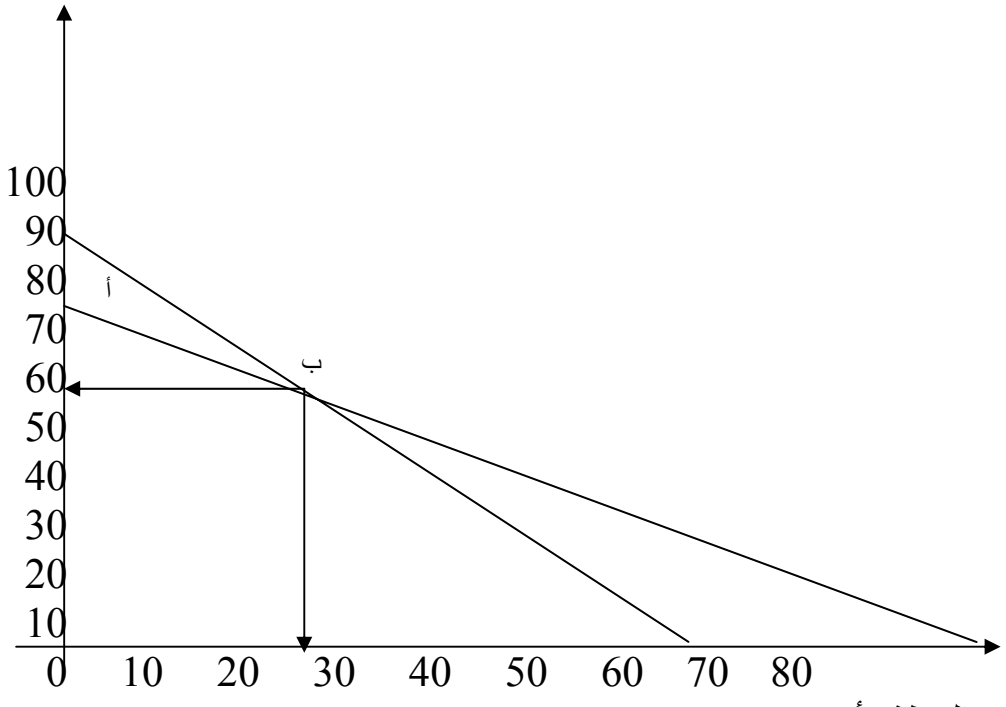
$y = 90$

$\underline{y = 0}$

$\therefore 9x = 630$

$x = 70$

X	0	70
y	90	0



عند النقطة (أ)

$x = 0$

$y = 75$

$p = 2 * 0 + 3 * 75$

$= 225$ SR

عند النقطة (ب)

$x = 28$

$y = 54$

$p = 2 * 28 + 3 * 54$

$= 218 \quad SR$

عند النقطة (جـ)

$x = 70$

$y = 0$

$p = 2 * 70 + 3 * 0$

$= 140 \quad SR$

عند النقطة (د)

$x = 0$

$y = 0$

$p = 2 * 0 + 3 * 0$

$= 0 \quad SR$

∴ أفضل نقطة عند النفطة(أ)لأنها تحقق أكبر ربح وذلك عند إنتاج صفر من النوع الأول و 75 وحدة من النوع الثانى

حساب الطاقة العاطلة

قيد الفاكهة

$3 * 0 + 4 * 75$

$= 300$

=الطرف للأيسر

أى لا توجد طاقة عاطلة لهذا العنصر

قيد المواد السكرية

$9 * 0 + 7 * 75$

$= 525$

أى توجد طاقة عاطلة لهذا العنصر

$630 - 525$

$= 105$

مثال

تقوم شركة سعود لصناعة الأجهزة الالكترونية بالتخطيط لإنتاج نوعين من الأجهزة هما التليفزيون والراديو . فإذا كان إنتاج التليفزيون الواحد يحتاج إلى 2 ساعة في مركز التجميع و3 ساعات في مركز الاختبارات. وإنتاج الراديو الواحد يحتاج إلى 4 ساعة في مركز التجميع و1 ساعة في مركز الاختبارات . فإذا علمت أن العائد من بيع كل جهاز تليفزيون هو 100 ريال ، ومن كل جهاز راديو هو 80 ريال. حدد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع حتى تحقق الشركة أقصى ربح ممكن، علما بأن طاقة مركز التجميع 80 ساعة أسبوعيا وطاقة مركز الاختبارات 60 ساعة أسبوعيا.

الحل

1- بناء النموذج الرياضي

	الموارد المتاحة		
المنتجات	مركز التجميع	مركز الاختبارات	الربح
تليفزيون x	2	3	100
راديو y	4	1	80
	الطاقة المتاحة		
	80	60	

2- كتابة القيود

$$2x + 4y \le 80$$
$$3x + y \le 60$$
$$x \le 0$$
$$y \le 0$$

3- كتابة دالة الهدف

المطلوب تعظيم الدالة

$$p = 100x + 80y$$

4- تحويل القيود إلى معادلات

$$2x + 4y = 80$$
$$\underline{x = 0}$$
$$\therefore 4y = 80$$
$$y = 20$$
$$\underline{y = 0}$$
$$2x = 80$$
$$x = 40$$

X	0	40
Y	20	0

$3x + y = 60$

$\underline{x = 0}$

$\therefore y = 60$

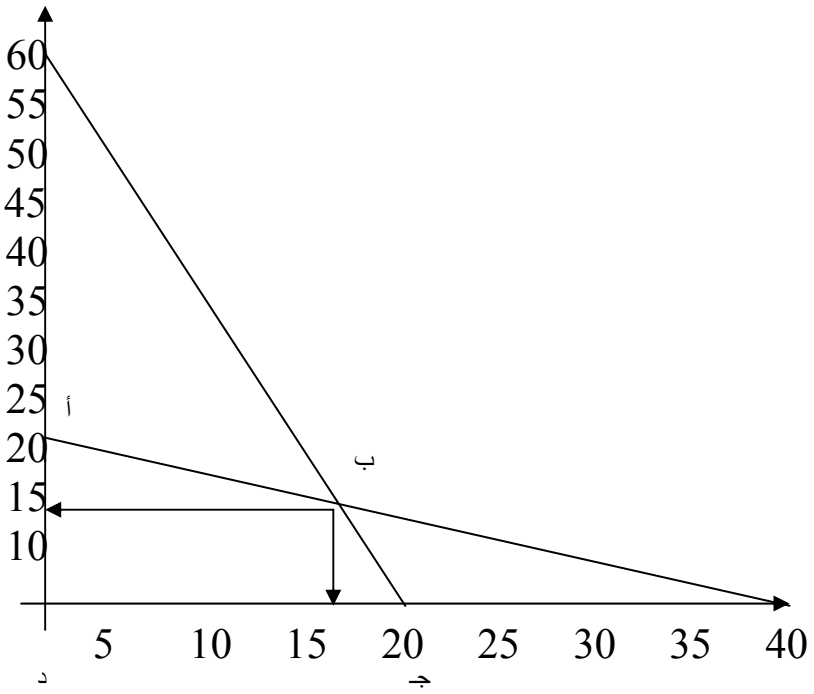
$\underline{y = 0}$

$\therefore 3x = 60$

$x = 20$

X	0	20
Y	60	0

5- الرسم



عند النقطة (أ)

$x = 0$

$y = 20$

$p = 100 * 0 + 80 * 20$

$= 1600 \quad SR$

عند النقطة (ب)

$x = 16$

$y = 12$

$p = 100 * 16 + 80 * 12$

$= 2560 \quad SR$

عند النقطة (جـ)

$x = 20$

$y = 0$

$p = 100 * 20 + 80 * 0$

$= 2000 \quad SR$

عند النقطة (د)

$x = 0$

$y = 0$

$p = 100 * 0 + 80 * 0$

$= 0 \quad SR$

∴أفضل نقطة عند النفطة (ب) لأنها تحقق أكبر ربح وذلك عند إنتاج 16 وحدة من النوع الأول و 12 وحدة من النوع الثانى .

مثال
يرغب أحد مديرى صناديق المعاشات فى إستثمار 5000 ريال بحد أقصى فى نوعين من السندات (أ) ، (ب) . وقد إتفق مدير الصندوق على الإستثمار فى السند (أ) بـ 4000 ريال على الأكثر ، والإستثمار فى السند ب بـ 600 ريال على الأقل . وبفرض أن كل ريال أستثمر فى السند (أ) من المتوقع أن يحقق عائد قدره 8% وفى السند (ب) عائد قدره 10% .
والمطلوب : تحديد عدد الريالات الواجب الإستثمار فيها من السند (أ) والسند (ب) لكى يحقق أكبر عائد ممكن ، وذلك بفرض أن قانون صندوق المعاشات يتطلب أن يكون الإستثمار فى السندات (ب) لا يزيد عن ثلث المستثمر فى السندات (أ) .

الحل
بفرض أن عدد الريالات المستثمرة فى القناة (أ) $= x$ ريال
بفرض أن عدد الريالات المستثمرة فى القناة (ب) $= y$ ريال

1- كتابة دالة الهدف
المطلوب أقصى ربح

$$p = 0.08x + 0.10y$$

2- كتابة القيود (المتباينات)

$$x + y \le 5000$$
$$x \le 4000$$
$$y \ge 600$$
$$y \le \frac{1}{3}x$$
$$x, y \ge 0$$

3- تحويل القيود إلى معادلات

$$x + y = 5000$$
$$\underline{x = 0}$$
$$\therefore y = 5000$$
$$\underline{y = 0}$$
$$x = 5000$$

x	0	5000
y	5000	0

$x = 4000$

X	4000
y	-

$y = 600$

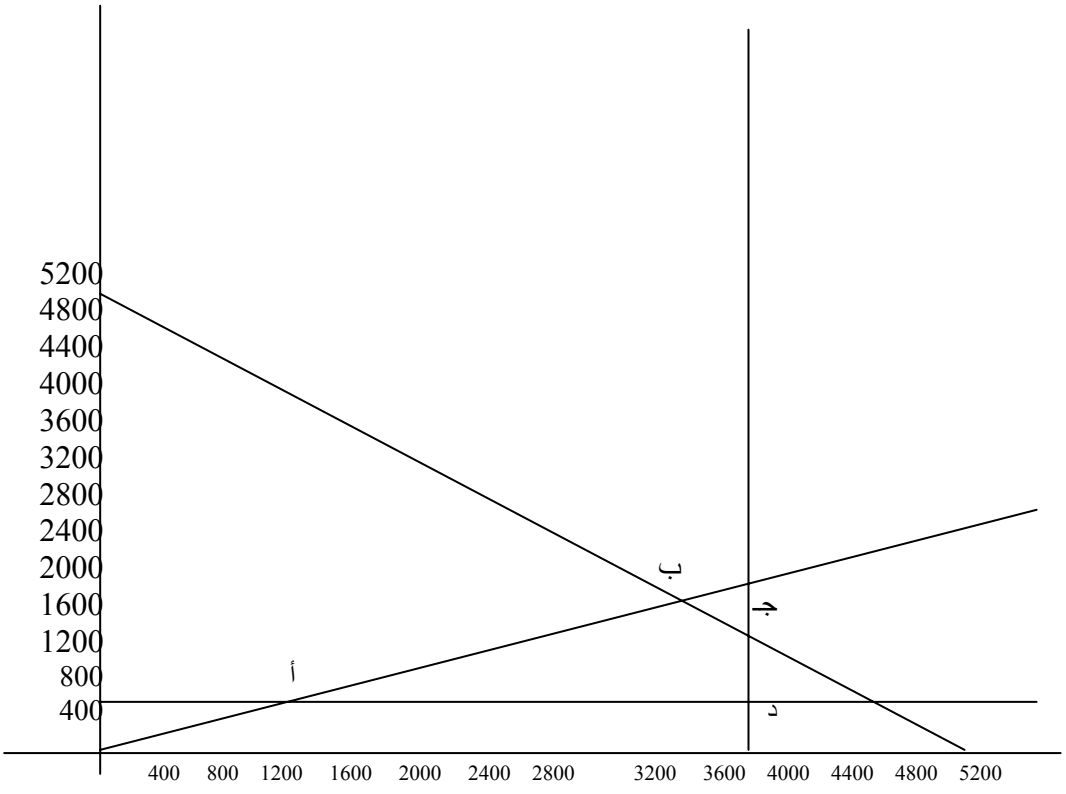
X	-
y	600

$y = \frac{1}{3}x$

$\underline{x = 3y}$

X	y
400	1200
800	2400
1200	3600

4- الرسم



عند النقطة (أ)

$x = 1800$

$y = 600$

$p = 0.08 * 1800 + 0.1 * 600$

$= 204 \quad SR$

عند النقطة (ب)

$x = 3750$

$y = 1250$

$p = 0.08 * 3750 + 0.1 * 1250$

$= 425 \quad SR$

عند النقطة (جـ)

$x = 4000$

$y = 1000$

$p = 0.08 * 4000 + 0.1 * 1000$

$= 420 \quad SR$

عند النقطة (د)

$x = 4000$

$y = 600$

$p = 0.08 * 4000 + 0.1 * 600$

$= 380 \quad SR$

أفضل نقطة عند النفطة(ب) لأنها تحقق أكبر ربح وذلك عند :
الاستثمار فى القناة الأولى بـــ 37500 ريال .
و الاستثمار فى القناة الثانية بـــ 1350 ريال .

مثال

سلعتان غذائيتان السلعة الأولى تعطى 3 سعر حرارى وبها 5 وحدات فيتامين ، السلعة الثانية تعطى 6 سعر حرارى وبها 2 وحدة فيتامين . فإذا كان المطلوب 39 سعر حرارى على الأقل ، 25 وحدة فيتامين على الأقل . وبفرض أن تكلفة شراء الوحدة من السلعة الأولى 6 ريال ، ومن السلعة الثانية 8 ريال . فما هى الكمية الواجب شراؤها من كل سلعة لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة .

الحل

1- بناء النموذج الرياضي

	الموارد المتاحة		
المنتجات	سعر حرارى	فيتامين	السعر
النوع الأول x	3	5	6
النوع الثانى y	6	2	8
الطاقة المتاحة	39	25	

2- كتابة القيود

$$3x + 6y \geq 39$$
$$5x + 2y \geq 25$$
$$x, y \geq 0$$

3- كتابة دالة الهدف

المطلوب تدنية التكاليف (c)

$$c = 6x + 8y$$

4- تحويل القيود إلى معادلات

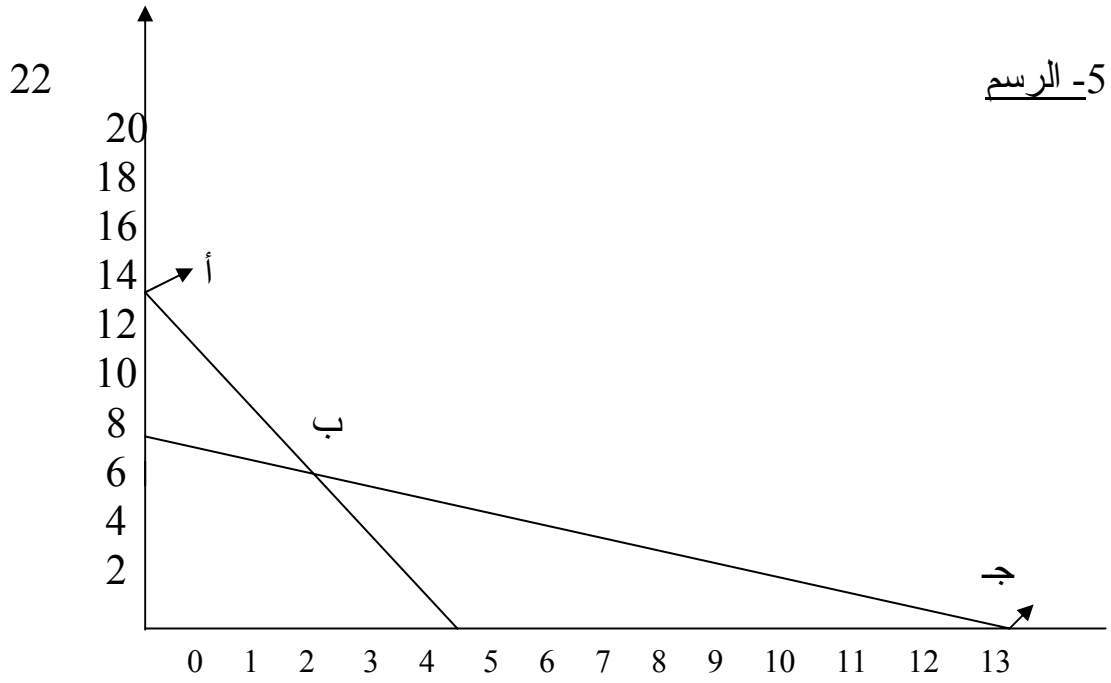
$$3x + 6y = 39$$
$$\underline{x = 0}$$
$$6y = 39$$
$$y = 6.5$$
$$\underline{y = 0}$$
$$3x = 39$$
$$x = 13$$

x	0	13
y	6.5	0

$$5x + 2y = 25$$
$$\underline{x = 0}$$
$$2y = 25$$
$$y = 12.5$$
$$\underline{y = 0}$$
$$5x = 25$$
$$x = 5$$

x	0	5
y	12.5	0

5- الرسم



عند النقطة (أ)

$x = 0$

$y = 12.5$

$c = 6*0 + 8*12.5$

$= 100$ SR

عند النقطة (ب)

$x = 3$

$y = 5$

$c = 6*3 + 8*5$

$= 58$ SR

عند النقطة (جـ)

$x = 13$

$y = 0$

$c = 6*13 + 8*0$

$= 78$ SR

أفضل نقطة عند النفطة ب لأنها تحقق أقل تكلفة وذلك عند شراء 3 وحدات من النوع الأول و 5 وحدات من النوع الثانى .

استخدام برنامج
MathCAD 2000 Professional

يعتبر برنامج MathCAD 2000 Professional من أشهر برامج الرياضيات ، حيث لديه القدرة على إتمام معظم العمليات الرياضية من حل للمعادلات سواء حل آنى أو بإستخدام المحددات أو المصفوفات . كذلك إيجاد الحلول المثلى للامتساويات

إيجاد النهاية العظمى والصغرى للدالة الهدف باستخدام برنامج MathCAD 2000

1- نكتب دالة الهدف

F(x,y):=

2- نعطى قيم إفتراضية لـ x,y

X:=1

Y:=1

3- نكتب الأمر

given

4- نكتب القيود وايضا قيود عدم السلبية

5- نكتب الأمر الخاص بدالة الهدف (تعظيم أو تدنية)

P:=Maximize (f,x,y)

Or

P:=Minimize (f,x,y)

6- نكتب الأمر

P=

7- عندئذ تظهر النتيجة الخاصة بقيم المتغيرات

8- نكتب الأمر

$F(p_o,p_1)$=

9- عندئذ تظهر النتيجة الخاصة بقيمة دالة الهدف

مثال

يقوم مصنع الشروق للصناعات الغذائية بإنتاج نوعين من السلع ويستخدم في إنتاجيهما الفاكهة والسكر كمواد أولية . وبفرض توافر لديك البيانات التالية :

- يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الأولى إلى 3 وحدات فاكهة ، 9 وحدات مواد سكرية . ويصل ربح الوحدة إلى 2 ريال .
- يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الثانية إلى 4 وحدات فاكهة ، 7 وحدات مواد سكرية . ويصل ربح الوحدة إلى 3 ريال .

- يمكن توفير 300 وحدة من الفاكهة يوميا على الأكثر ومن السكريات 630 وحدة على الأكثر.

والمطلوب : تحديد الكمية الواجب إنتاجها من السلعتين أو أحدهما لتحقيق أكبر ربح مكن ، وما هو مقدار الطاقة العاطلة إن وجدت ، وما هو مقدار الربح الكلى .

الحل

1- بناء النموذج الرياضي

	الموارد المتاحة		
المنتجات	فاكهة	مواد سكرية	الربح
الأولى x	3	9	2
الثانية y	4	7	3
	الموارد الكلية		
	300	630	

2- كتابة القيود

$$3x + 4y \le 300$$
$$9x + 7y \le 630$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

3- كتابة دالة الهدف

المطلوب تعظيم الدالة

$$p = 2x + 3y$$

4- استخدام برنامج Mathcad

$f(x, y) := 2x + 3y$

$x := 1$

$y := 1$

Given

$3x + 4y \leq 300$

$9x + 7y \leq 630$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$p := \text{Maximize}(f, x, y)$

$p =$ ▮

$f(p_0, p_1) =$ ▮

مثال

يرغب أحد مديرى صناديق المعاشات فى إستثمار 5000 ريال بحد أقصى فى نوعين من السندات (أ) ، (ب) . وقد إتفق مدير الصندوق على الإستثمار فى السند (أ) بـ 4000 ريال على الأكثر ، والإستثمار فى السند ب بـ 600 ريال على الأقل . وبفرض أن كل ريال أستثمر فى السند (أ) من المتوقع أن يحقق عائد قدره 8% وفى السند (ب) عائد قدره 10% .

والمطلوب : تحديد عدد الريالات الواجب الإستثمار فيها من السند (أ) والسند (ب) لكى يحقق أكبر عائد ممكن ، وذلك بفرض أن قانون صندوق المعاشات يتطلب أن يكون الإستثمار فى السندات (ب) لا يزيد عن ثلث المستثمر فى السندات (أ) .

الحل

بفرض أن عدد الريالات المستثمرة فى القناة (أ) = x ريال

بفرض أن عدد الريالات المستثمرة فى القناة (ب) = y ريال

1- كتابة دالة الهدف

المطلوب أقصى ربح

$$p = 0.08x + 0.10y$$

2- كتابة القيود (المتباينات)

$$x + y \le 5000$$

$$x \le 4000$$

$$y \ge 600$$

$$y \le \frac{1}{3}x$$

$$x, y \ge 0$$

3- استخدام برنامج MathCAD

$f(x, y) := 0.08x + 0.10y$

$x := 1$

$y := 1$

Given

$x + y \leq 5000$

$x \leq 4000$

$y \geq 600$

$y \leq \frac{1}{3}x$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$p := \text{Maximize}(f, x, y)$

$p =$ ▮

$f(p_0, p_1) =$ ▮

مثال

سلعتان غذائيتان السلعة الأولى تعطى 3 سعر حرارى وبها 5 وحدات فيتامين ، السلعة الثانية تعطى 6 سعر حرارى وبها 2 وحدة فيتامين . فإذا كان المطلوب 39 سعر حرارى على الأقل ، 25 وحدة فيتامين على الأقل . وبفرض أن تكلفة شراء الوحدة من السلعة الأولى 6 ريال ، ومن السلعة الثانية 8 ريال . فما هى الكمية الواجب شراؤها من كل سلعة لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة .

الحل

1- بناء النموذج الرياضي

	الموارد المتاحة		
المنتجات	سعر حرارى	فيتامين	السعر
النوع الأول x	3	5	6
النوع الثانى y	6	2	8
الطاقة المتاحة	39	25	

2- كتابة القيود

$$3x + 6y \geq 39$$
$$5x + 2y \geq 25$$
$$x, y \geq 0$$

3- كتابة دالة الهدف

المطلوب تدنية التكاليف (c)

$$c = 6x + 8y$$

$f(x, y) := 6x + 8y$

$x := 1$

$y := 1$

Given

$3x + 6y \geq 39$

$5x + 2y \geq 25$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$p := \text{Minimize}(f, x, y)$

$p =$ ∎

$f(p_0, p_1) =$ ∎

مثال
تقوم شركة التطوير العقارى بالتخطيط لبناء مدينة سكنية على أحد شواطئ جدة.
وبفرض أن هناك ثلاث نماذج للشقق A,B,C . وبفرض أنه تم تحويل عمليات الإنشاء والتشيد إلى ساعات عمل على النحو التالي:

	ساعات العمل المطلوبة للإتمام		
نموذج الشقة	بناء العظم	البناء الداخلى	التشطيب
A	60	40	80
B	100	140	90
C	40	120	80
عدد العمال	142	197	173
متوسط عدد ساعات العمل يوميا	10	10	10
الأجر عن الساعة	100	120	150

وبفرض أن تكاليف المواد الخام على النحو التالي:

نموذج الشقة	الرمل والزلط بالقلاب	الأسمنت بالطن	الحديد بالطن	السيراميك بالعشرة كرتون
A	15	5	10	30
B	20	7	15	40
C	12	4	20	50
السعر عن الوحدة	100 ريال	200	3000	1000

وبفرض أن نصيب كل شقة من تكلفة الأرض في المتوسط هي:

نموذج الشقة	نصيب الشقة من تكلفة الأرض
A	20000 ريال
B	25000 ريال
C	30000 ريال

وبفرض أن سعر بيع الشقق على النحو التالي:

نموذج الشقة	نصيب الشقة من تكلفة الأرض
A	120000 ريال
B	170000 ريال
C	190000 ريال

والمطلوب منك تحديد عدد الوحدات الواجب بناؤها من كل نوع لكي تحقق هذه الشركة أكبر ربح ممكن، وما مقدار الطاقة العاطلة عندئذ.

الحل

بتحديد تكاليف وصافي الربح عن كل شقة

للنموذج A

$$\begin{aligned} The\ cost &= (60*100 + 40*120 + 80*150) \\ &+ (15*100 + 5*200 + 10*3000 + 30*1000) \\ &+ (20000) \\ &= 105300\ SR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} The\ profit &= 120000 - 105300 \\ &= 14700\ SR \end{aligned}$$

للنموذج B

$$\begin{aligned} The\ cost &= (100*100 + 140*120 + 90*150) \\ &+ (20*100 + 7*200 + 15*3000 + 40*1000) \\ &+ (25000) \\ &= 153700\ SR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} The\ profit &= 170000 - 153700 \\ &= 16300\ \ SR \end{aligned}$$

للنموذج C

$$\begin{aligned} The\ cost &= (40*100 + 120*120 + 80*150) \\ &+ (12*100 + 4*200 + 20*3000 + 50*1000) \\ &+ (30000) \\ &= 172000\ SR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} The\ profit &= 190000 - 172000 \\ &= 18000\ SR \end{aligned}$$

وبإستخدام برنامج MathCAD

$f(x,y,z) := 14700x + 16300y + 18000z$

$x := 1$

$y := 1$

$z := 1$

Given

$60x + 100y + 40z \le 1420$

$40x + 140y + 120z \le 1970$

$80x + 90y + 80z \le 1730$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

$z \ge 0$

$p := \text{Maximize}(f, x, y, z)$

$$p = \begin{bmatrix} 7.812 \\ 0 \\ 13.813 \end{bmatrix}$$

$f(p_0, p_1, p_2) = 3.635 * 10^5$

أي أن من الأفضل لتلك الشركة أن تقوم ببناء 8 شقق تقريبا من النموذج A و14 شقة تقريبا من النموذج C ولا تقوم ببناء أي شقة من النموذج B . وعندئذ تحقق الشركة ربح قدره 363500 ريال.

حساب الطاقة العاطلة

قيد عمال بناء العظم

$$60x + 100y + 40z \le 1420$$

$$60 * 7.812 + 0 + 40 * 13.813 = 1021.24$$

أذن توجد طاقة عاطلة لعمال بناء العظم = 1420-1021.24=399 ساعة عمل تقريبا..... أي ما يعادل 40 عامل .

قيد عمال البناء الداخلي

$$40x + 140y + 120z \le 1970$$

$$40 * 7.812 + 0 + 120 * 13.813 = 1970$$

أى لا توجد طاقة عاطلة لهذا العنصر.

قيد عمال التشطيب

$$80x + 90y + 80z \le 1730$$

$$80 * 7.812 + 0 + 80 * 13.813 = 1730$$

أى لا توجد طاقة عاطلة لهذا العنصر أيضا.

التكلفة الرأسمالية

مقدمة

يقصد بالتكلفة الرأسمالية للأصل التكاليف الكلية اللازمة للحصول على الأصل مضافا إليها القيمة الحالية لجميع المصروفات التي تجعل الأصل مستمرا في العمل. وللوصول إلى القيمة الحالية للنقود لابد من حسابها من جداول معينة تعرف بجداول الرياضة المالية بمعدل فائدة مركبة وهى:

وهى تلك الجداول التي تستخدم في تطبيقات الفوائد المركبة ونظرية القروض والتي تتضمن الخانات التالية (كل خانة تعبر عن جدول معين) :

$i = \%$

n	$(1+i)^n$	$(1+i)^{-n}$	$f:\overline{n}$	$f^{\cdot}:\overline{n}$	$a:\overline{n}$	$a^{\cdot}:\overline{n}$	$\frac{1}{a:\overline{n}}$

جدول (1)

هذا الجدول يعطى جملة وحدة النقود مستثمرة بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

جدول (2)

هذا الجدول يعطى القيمة الحالية لوحدة النقود بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

جدول (3)

هذا الجدول يعطى جملة دفعة تؤدى آخر كل سنة مبلغها السنوي هو وحدة النقود مستثمرة بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

جدول (4)

هذا الجدول يعطى جملة دفعة تؤدى أول كل سنة مبلغها السنوي هو وحدة النقود مستثمرة بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

جدول (5)

هذا الجدول يعطى القيمة الحالية لدفعة تؤدى كل آخر سنة مبلغها السنوي هو وحدة النقود مستثمرة بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

جدول (6)

هذا الجدول يعطى القيمة الحالية لدفعة تؤدى كل أول سنة مبلغها السنوي هو وحدة النقود مستثمرة بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

جدول (7)

هذا الجدول يعطى قيمة القسط السنوي الثابت الذي يمكن على أساسه سداد وحدة النقود بالفائدة المركبة بمعدلات مختلفة تبدأ من 1% إلى 10% ولمدد من سنة إلى 25 سنة.

وفيما يلي جزء من تلك الجداول بمعدل فائدة مركبة وليكن 6% :

$i=6\%$

n	$(1+i)^n$	$(1+i)^{-n}$	$f:\overline{n}$	$f^{\cdot}:\overline{n}$	$a:\overline{n}$	$a^{\cdot}:\overline{n}$	$\frac{1}{a:\overline{n}}$
1	1.06	0.943396	1	1.06	0.943396	1	1.06
2	1.1236	0.889996	2.06	2.1836	1.833393	1.943396	0.545437
3	1.191016	0.839619	3.1836	3.374616	2.673012	2.833393	0.37411
4	1.262477	0.792094	4.374616	4.637093	3.465106	3.673012	0.288591
5	1.338226	0.747258	5.637093	5.975319	4.212364	4.465106	0.237396
6	1.418519	0.704961	6.975319	7.393838	4.917324	5.212364	0.203363
7	1.50363	0.665057	8.393838	8.897468	5.582381	5.917324	0.179135
8	1.593848	0.627412	9.897468	10.49132	6.209794	6.582381	0.161036
9	1.689479	0.591898	11.49132	12.18079	6.801692	7.209794	0.147022
10	1.790848	0.558395	13.18079	13.97164	7.360087	7.801692	0.135868
11	1.898299	0.526788	14.97164	15.86994	7.886875	8.360087	0.126793
12	2.012196	0.496969	16.86994	17.88214	8.383844	8.886875	0.119277
13	2.132928	0.468839	18.88214	20.01507	8.852683	9.383844	0.11296
14	2.260904	0.442301	21.01507	22.27597	9.294984	9.852683	0.107585
15	2.396558	0.417265	23.27597	24.67253	9.712249	10.29498	0.102963
16	2.540352	0.393646	25.67253	27.21288	10.1059	10.71225	0.098952
17	2.692773	0.371364	28.21288	29.90565	10.47726	11.1059	0.095445
18	2.854339	0.350344	30.90565	32.75999	10.8276	11.47726	0.092357
19	3.0256	0.330513	33.75999	35.78559	11.15812	11.8276	0.089621
20	3.207135	0.311805	36.78559	38.99273	11.46992	12.15812	0.087185

وعند حساب التكلفة الرأسمالية لمشروع إستثمارى أو آلة يجب التفرقة هنا بين عدة أنواع من الأصول وهى :

(1) أصل يحتاج إلى تجديدات كل k سنة.

التكلفة الرأسمالية = ثمن شراء الأصل + م. الصيانة والتجديدات * $\frac{1}{i\%}$ * $\frac{1}{f:\bar{k}}$

أو

التكلفة الرأسمالية = ثمن شراء الأصل + م. الصيانة والتجديدات * $\frac{1}{(1+i\%)^k - 1}$

(2) أصل له قيمة خردة في نهاية عمره الافتراضي.

التكلفة الرأسمالية= ثمن شراء الأصل+ (ثمن شراء الأصل ــ قيمة النفاية)* $\frac{1}{i\%}$ * $\frac{1}{f:\bar{k}}$

أو

التكلفة الرأسمالية= ثمن شراء الأصل+ (ثمن شراء الأصل ــ قيمة النفاية)* $\frac{1}{(1+i\%)^k - 1}$

مثال
عقار يقدر ثمنه الآن بـ 200000 ريال ويحتاج إلى مصروفات صيانة وتجديدات تقدر بـ 100000 ريال تدفع في نهاية كل 25 سنة. أوجد التكلفة الرأسمالية لهذا الأصل وذلك بفرض أن معدل الفائدة المركب السائد في السوق هو 3% سنويا.

الحل

حل (1)

∴ التكلفة الرأسمالية = ثمن شراء الأصل + م. الصيانة والتجديدات * $\frac{1}{i\%}$ * $\frac{1}{f:\overline{k}}$

$$=200000+100000*\frac{1}{0.03}*\frac{1}{f:\overline{25}}$$

$$=200000+100000*\frac{1}{0.03}*\frac{1}{36.45926}$$

$$=200000+91426.24763$$

$$=291426.2476 \text{ ريال.}$$

حل (2)

التكلفة الرأسمالية = ثمن شراء الأصل + م. الصيانة والتجديدات * $\frac{1}{(1+i\%)^k-1}$

$$=200000+100000*\frac{1}{(1+0.03)^{25}-1}$$

$$=200000+100000*\frac{1}{2.093778-1}$$

$$=200000+100000*\frac{1}{1.093778}$$

$$=200000+100000*0.914262$$

$$=291426.2309 \text{ ريال.}$$

مثال

آلة يبلغ ثمن شراؤها الآن 200000ريال ويبلغ عمرها الإنتاجي 12 سنة حيث تباع في نهاية عمرها الافتراضي كخردة بمبلغ 30000 ريال. أحسب التكلفة الرأسمالية لهذه الآلة وكذلك مخصص الإهلاك السنوي وذلك بفرض أن معدل الفائدة المركب السائد في السوق هو 8% سنويا.

الحل

التكلفة الرأسمالية= ثمن شراء الأصل+ (ثمن شراء الأصل ــ قيمة النفاية)* $\frac{1}{i\%}$ * $\frac{1}{f:\overline{k}}$

$$=200000+(30000-200000)*\frac{1}{0.08}*\frac{1}{f:\overline{12}}$$

$$=200000+170000*\frac{1}{0.08}*\frac{1}{18.97713}$$

$$=200000+111976.8901$$

$$=311976.8901 \text{ ريال.}$$

مخصص الإهلاك= (ثمن شراء الأصل ــ قيمة النفاية)* $\frac{1}{f:\overline{k}}$

$$=(30000-200000)*\frac{1}{f:\overline{12}}$$

$$=170000*\frac{1}{18.97713}$$

$$= 8958.15120 \text{ ريال سنويا.}$$

مثال

آلة ثمن شراؤها 100000 ريال يقدر عمرها الافتراضي بـ 10 سنوات وتباع في نهاية تلك الفترة كخردة بـ 15000 ريال. كما أن التكلفة المتوقعة لإحلال آلة بديلة في نهاية المدة تبلغ 180000 ريال. فإذا علمت أن معدل الفائدة المركب السائد في السوق هو 10% سنويا. فاحسب الأتي :

(1) قسط الإهلاك السنوي.

(2) القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة الرابعة.

الحل

(1) قسط الإهلاك السنوي.

مخصص الإهلاك= (ثمن شراء الأصل ــ قيمة النفاية)* $\frac{1}{f:\bar{k}}$

$=(15000-180000)*\frac{1}{f:\bar{12}}$

$=165000*\frac{1}{18.97713}$

= 10353 ريال سنويا.

(2) القيمة الدفترية للآلة في نهاية السنة الرابعة.

القيمة الدفترية لأي أصل إنتاجي في نهاية السنة r = قيمة الأصل– مخصص الإهلاك* $f:\bar{r}$

$=100000 - 10353 * f:\bar{4}$

$=100000 - 10353 * 4.641$

$=100000 - 48048.273$

=51951.727 ريال.

مثال

ترغب شركة التطوير العقارى فيالتبرع بإقامة مبنى لكلية الهندسة بجامعة الملك عبد العزيز وفاءا من صاحبها لهذه الكلية التي تخرج منها. وقد قدر الخبراء التكاليف اللازمة لإنشاء هذا المبنى كما يلي:

(1) تقدر مصاريف المباني بـ 20000000 ريال ، وتحتاج إلى ترميمات كل 10 سنوات بـ 1000000ريال ، كما تبلغ مصاريف الدهان بـ 25000 ريال تدفع آخر كل سنة.

(2) تقدر قيمة الأثاث والتركيبات بمبلغ 4000000 ريال ويتم تجديدها كل 20 سنة حيث تباع نفايتها كمخلفات بـ 250000 ريال.

احسب التكلفة الرأسمالية لهذا المبنى وذلك بفرض أن متوسط معدل الفائدة المركب السائد في السوق هو 10% سنويا.

الحل

<u>التكلفة الرأسمالية للمبنى هي</u>

$$= 20000000 + 1000000 * \frac{1}{i\%} * \frac{1}{f{:}\overline{10}} + 25000 * f{:}\overline{\infty}$$

$$+$$

$$4000000 + (4000000 + 250000) * \frac{1}{i\%} * \frac{1}{f{:}\overline{20}}$$

$$= 20000000 + 1000000 * \frac{1}{0.10} * \frac{1}{15937425} + 25000 * \frac{1}{0.10}$$

$$+$$

$$4000000 + 3750000 * \frac{1}{0.10} * \frac{1}{57.274999}$$

$$= 20000000 + 62745.39 + 250000 + 4000000 + 654735.93$$

$$= 2496748132 \ \ SR$$

مثال

يمتلك شخص عقار يدر عائد سنوي قدره 50000 ريال أخر كل سنة ويقدر الخبراء ضرورة هدمه في نهاية 25 سنة ، حيث تبلغ قيمة الأنقاض حينئذ بمبلغ 200000 ريال وتقدر ثمن الأرض المقام عليها المبنى الآن بـ 1000000 ريال. ويحتاج المبنى إلى ترميمات بمبلغ 100000 ريال بعد 10 سنوات من الآن ، كذلك فإنه يحتاج إلى صيانة دورية كل 3 سنوات بمبلغ 2000 ريال. وقد قام هذا الشخص ببيع هذا العقار وأشترى بثمنه آلة تريكو يقدر الخبراء عمرها الافتراضي بـ 20 سنة حيث تباع كنفاية في نهاية عمرها بـ 1000000 ريال. احسب قيمة مخصص الإهلاك السنوي الواجب حجزه من أرباح تلك للآلة. علما بأن معدل الفائدة المركب السائد في السوق هو 10% في جميع الأحوال.

الحل

ثمن بيع المنزل اليوم = القيمة الحالية للإيرادات – القيمة الحالية للمصروفات.

$$= \left[50000 * a:\overline{25} + 200000 * (1+10\%)^{-25} + 1000000\right]$$

-

$$\left[100000 * (1+10\%)^{-10} + 2000 * \frac{1}{(1+10\%)^3 - 1}\right]$$

$$= \left[50000 * 9.07704 + 200000 * 0.092296 + 1000000\right]$$

-

$$\left[100000 * 0.385543 + 2000 * 3.021148\right]$$

$$= 147231102 - 44596.59607$$

$$= 1427714.604$$

أي أن ثمن الآلة= 1427714.604 ريال

∴ مخصص الإهلاك= (ثمن شراء الأصل ــ قيمة النفاية)* $\frac{1}{f:\overline{k}}$

$$= (1427714.604 - 100000) * \frac{1}{f:\overline{20}}$$

$$= 1327714.604 * \frac{1}{57.275}$$

$$= 1327714.604 * 0.0174596$$

$$= 23181.4 \quad a\ year$$